濮阳市普通高中 2023—2024 学年

高一下学期期中考试

数学（人教版）

全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，且 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC},\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD},\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$，则（　　）

A. $AC\perp BD$　　B. 四边形 $ABCD$ 是梯形

C. 四边形 $ABCD$ 是菱形　　D. 四边形 $ABCD$ 是矩形

【答案】D

【解析】

【分析】由题意，根据相等向量的概念和向量的模，结合矩形的判定定理即可求解.

【详解】由 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC},\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD},\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$，

知四边形 $ABCD$ 的对角线相互平分且相等，

所以四边形 $ABCD$ 为矩形.

故选：D

2. 两个三棱锥、一个四棱锥拼在一起不可能拼成的是（　　）

A. 一个三棱锥　　B. 一个四棱锥

C. 一个三棱柱　　D. 一个四棱柱

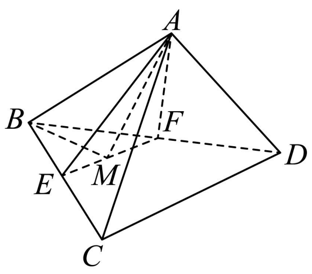
【答案】D

【解析】

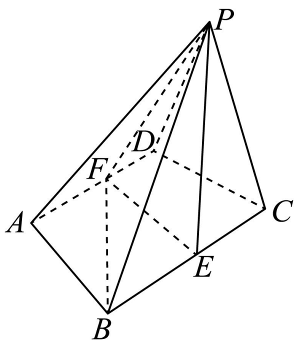
【分析】两个三棱锥和一个四棱锥能否拼成某几何体，可以看该几何体可否拆割成两个三棱锥和一个四棱锥，即可判断得答案.

【详解】对于 A，三棱锥 $A-BCD$ 中，分别取 BC,BD 的中点 E,F，再取 EF 的中点 M，连接 AM，

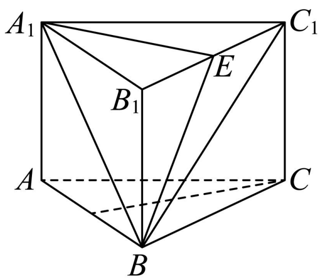
则三棱锥 $A-BCD$ 可拆割成三棱锥 $A-BEM,A-BFM$ 和四棱锥 $A-CDFE$，A 可能；



对于 B，四棱锥 $P-ABCD$，取 BC,AD 的中点 E,F，则四棱锥 $P-ABCD$ 可拆割成三棱锥 $P-ABF,P-BEF$ 和四棱锥 $P-CDFE$，B 可能；



对于 C，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，取 B_1C_1 的中点 E，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可拆割为三棱锥 B_1-A_1BE,C_1-A_1BE 和四棱锥 $B-ACC_1A_1$，C 可能；



对于 D，一个四棱柱割去一个四棱锥后的几何体不可能由两个三棱锥拼成，D 不可能.

故选：D

3. 已知复数 $z=a+(2-a)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$，i 为虚数单位，当 $|z|=\sqrt{2}$ 时，$\dfrac{z}{2-\mathrm{i}}=$（　　）

A. $3+\mathrm{i}$　　B. $1+\mathrm{i}$　　C. $\dfrac{1}{5}+\dfrac{3\mathrm{i}}{5}$　　D. $\dfrac{3}{5}+\dfrac{\mathrm{i}}{5}$

【答案】C

【解析】

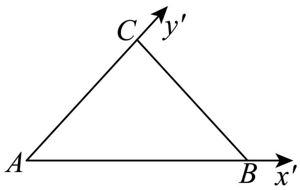
【分析】利用复数模求出 a，再利用复数的除法求解即得.

【详解】依题意，$|z|=\sqrt{a^2+(2-a)^2}=\sqrt{2a^2-4a+4}=\sqrt{2}$，解得 $a=1$，则 $z=1+\mathrm{i}$，

所以 $\frac{z}{2-\mathrm{i}}=\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{1+3\mathrm{i}}{5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$.

故选：C

4. 用斜二测画法画一个水平放置的平面图形，恰为一个直角边长为 3 的等腰直角三角形（如图），$\angle ACB=90^{\circ}$，则原图形的面积为（　　）



A. $9\sqrt{2}$　　　　B. 18　　　　C. $18\sqrt{2}$　　　　D. $\frac{9}{2}$

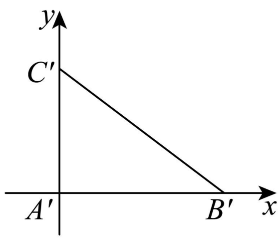
【答案】A

【解析】

【分析】由题意求出 AB，结合斜二测画法作出原图，结合图形即可求解.

【详解】由题意知，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}, AC=BC=3$，则 $AB=\sqrt{AC^{2}+BC^{2}}=3\sqrt{2}$，

由斜二测画法，将直观图还原为原图，如图所示，



则 $A'C'=2AC=6$，$A'B'=AB=3\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times 6=9\sqrt{2}$.

故选：A

5. 已知在 $\triangle ABC$ 中，H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CH}$，则以下正确的是（　　）

A. 点 O 为 $\triangle ABC$ 的内心　　　　B. 点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心

C. $\angle ACB=90^{\circ}$　　　　D. $\triangle ABC$ 为等边三角形

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件，利用向量数量积运算律，结合向量加减计算判断得解.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中，由 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，得 $CH \perp AB$，

由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CH}$，得 $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{CH}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，

则 $\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2$，即 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$，又

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$，

显然 $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$，同理得 $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}|$，因此点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，B 正确，无判断 ACD 成立的条件.

故选：B

6. 已知 $z_1=(x+2y)+(y+2)\mathrm{i}, z_2=(2x-y)+(x-y)\mathrm{i}, x,y\in\mathbf{R},\mathrm{i}$ 为虚数单位，若 $z_1=z_2, \overline{z_2}$ 为 z_2 的共轭复数，则 $z_1\cdot\overline{z_2}=$（ ）

A. 14 B. 116 C. $\sqrt{14}$ D. $2\sqrt{29}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据相等复数建立方程组，解得 $\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$，进而解出 z_1、$\overline{z_2}$，结合共轭复数的概念与复数的乘法运算即可求解.

【详解】由 $z_1=z_2$，得 $(x+2y)+(y+2)\mathrm{i}=(2x-y)+(x-y)\mathrm{i}$，

所以 $\begin{cases}x+2y=2x-y\\y+2=x-y\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$，

则 $z_1=z_2=10+4\mathrm{i}$，所以 $\overline{z_2}=10-4\mathrm{i}$，

所以 $z_1\cdot\overline{z_2}=(10+4\mathrm{i})(10-4\mathrm{i})=116$.

故选：B

7. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$，且 $AB=1, AD=2, AC=2\sqrt{2}$，则 $\cos\angle CBD=$（ ）

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\dfrac{3}{5}$ C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\dfrac{2}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意可得，$AD \perp DC$，四边形 $ABCD$ 为直角梯形，建立平面直角坐标系，利用向量夹角公式运算得解.

【详解】$\because \overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$，$\therefore \overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$，则 $DC//AB$ 且 $DC=2AB=2$，

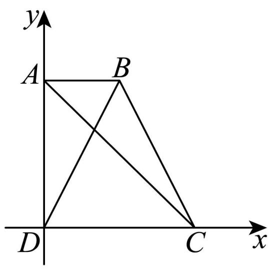
又 $AD=2$，$AC=2\sqrt{2}$，所以 $AC^2=AD^2+DC^2$，则 $AD \perp DC$，

所以四边形 $ABCD$ 为直角梯形，如图，以点 D 为坐标原点，DC,DA 分别为 x,y 轴建立平面直角坐标系，

则 $B(1,2)$，$C(2,0)$，$D(0,0)$，所以 $\overrightarrow{BD}=(-1,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(1,-2)$，

所以 $\cos\angle CBD=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{-1+4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}$.

故选：B.



8. 多面体欧拉定理是指：若多面体的顶点数为 V，面数为S，棱数为 l，则满足 $V+S=l+2$. 已知某 n 面体各面均为五边形，且经过每个顶点的棱数为3，则 $n=$（　　）

A. 6　　B. 10　　C. 12　　D. 20

【答案】C

【解析】

【分析】根据给定条件，结合欧拉公式列出方程组，求解方程组即得.

【详解】设该多面体的顶点数为 x，棱数为 y，

依题意，$\begin{cases} x+n=y+2 \\ 5n=2y \\ 3x=2y \end{cases}$，消去 x,y 得 $n=12$，

所以 $n=12$.

故选：C

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9. 已知复数 $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\mathrm{i}$ 为虚数单位，则下列说法错误的是（　　）

A. z 的虚部为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　B. $|z|=1$　　C. $z^{2022}=1$　　D. z 为纯虚数

【答案】AD

【解析】

【分析】由复数的基本概念可判断 AD 错误，由模长公式计算即可判断 B 正确，由于 $\bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 与 $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 为方程 $x^2-x+1=0$ 的两个根，可知 $x^3+1=0$，$z^3=-1$，$z^{2022}=\left(z^3\right)^{674}$，即可求解.

【详解】复数 $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，故实部为 $\frac{1}{2}$，虚部为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 AD 错误；

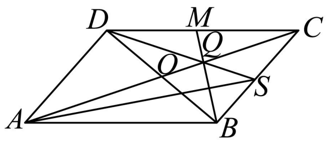
$|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$，故 B 正确；

$\bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 与 $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 为方程 $x^2-x+1=0$ 的两个根，可知 $x^3+1=0$，

所以 $z^3=-1$，$z^{2022}=\left(z^3\right)^{674}=1$，故 C 正确.

故选：AD

10. 在平行四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，M 为 CD 的中点，BM 与 AC 交于点 Q，延长 DQ 交 BC 于 S，$\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DS}\left(\lambda\in R\right)$，则（　　）



A. Q 为三角形 BCD 的外心　　B. $\lambda=\frac{2}{3}$

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$　　D. $4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BD}^2$

【答案】BCD

【解析】

【分析】由$\triangle MCQ$与$\triangle BAQ$相似，M为CD的中点，可知$\overrightarrow{MQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{QB}$，所以点$Q$为三角形$BCD$的重心，判断出A错误；由重心得到S为$BC$的中点，所以$\overrightarrow{DQ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DS}$，判断出B正确；由平面向量的基本定理判断出C，D正确.

【详解】在三角形BCD中，M为CD的中点，又$\triangle MCQ$与$\triangle BAQ$相似，

可得：$\overrightarrow{MQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{QB}$，故点$Q$为三角形$BCD$的重心，故A错误；

由于点Q为三角形BCD的重心，延长DQ交BC于S，则S为BC的中点，

所以$\overrightarrow{DQ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DS}$，故B正确；

$\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AS}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}$，故C正确；

$\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BD}^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)^2-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)^2=4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$，故D正确.

故选：BCD.

11. 已知a，$b\in\mathbf{R}$，方程$x^3-3x^2+ax-b=0$有一个虚根为$1+\mathrm{i}$，i为虚数单位，另一个虚根为z，则（　　）

A. $a=4$　　　　B. 该方程的实数根为1

C. $z=2-\mathrm{i}$　　　　D. $z^{2024}=2^{203}$

【答案】AB

【解析】

【分析】利用方程根的意义，借助复数运算及复数为0的充要条件求出a,b，再逐项计算判断即可.

【详解】由$1+\mathrm{i}$是方程$x^3-3x^2+ax-b=0$的根，得$(1+\mathrm{i})^3-3(1+\mathrm{i})^2+a(1+\mathrm{i})-b=0$，

整理得$(a-b-2)+(a-4)\mathrm{i}=0$，而$a,b\in\mathrm{R}$，因此$\begin{cases}a-b-2=0\\a-4=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$，

对于A，$a=4$，A正确；

对于 BC，方程 $x^3-3x^2+4x-2=0$，变形为 $(x-1)(x^2-2x+2)=0$，

显然此方程还有一个实根 1，另一个虚根 $1-\mathrm{i}$，B 正确，C 错误；

对于 D，$z^{2024}=[(1-\mathrm{i})^2]^{1012}=(-2)^{1012}\mathrm{i}^{1012}=2^{1012}$，D 错误.

故选：AB

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知 $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{13},\left|\vec{a}\right|=1$，且 $\vec{b}^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$，则 $\left|\vec{b}\right|=$______.

【答案】2

【解析】

【分析】由题意，结合 $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2$ 运算即可求解.

【详解】由 $\left|\vec{a}\right|=1,\vec{b}^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$，得 $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=1-\vec{b}^2+4\vec{b}^2=13$，

所以 $\vec{b}^2=4$，解得 $\left|\vec{b}\right|=2$.

故答案为：2

13. 已知复数 z 满足 $\left|z-1-\mathrm{i}\right|=2$，$\mathrm{i}$ 为虚数单位，z 在复平面上对应的点为 Z，定点 $M\left(-1,0\right)$，O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OZ}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的最小值为____________.

【答案】-3

【解析】

【分析】根据给定条件，利用复数模的几何意义，结合向量数量积的运算律及定义法求出向量的数量积求解即得.

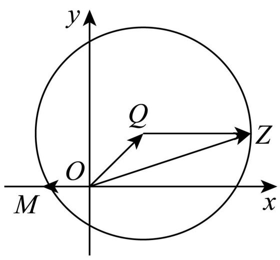
【详解】依题意，点 Z 的轨迹是复平面上以点 $Q(1,1)$ 为圆心，2 为半径的圆，

$\overrightarrow{OZ}\cdot\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QZ})\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{QZ}\cdot\overrightarrow{OM}$，而 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OM}=(1,1)\cdot(-1,0)=-1$，

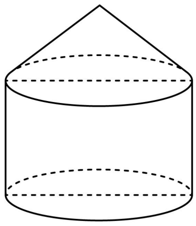
$\overrightarrow{QZ}\cdot\overrightarrow{OM}=|\overrightarrow{QZ}||\overrightarrow{OM}|\cos\langle\overrightarrow{QZ},\overrightarrow{OM}\rangle=2\cos\langle\overrightarrow{QZ},\overrightarrow{OM}\rangle\ge-2$，当且仅当 $\overrightarrow{QZ},\overrightarrow{OM}$ 方向相反时取等号，

所以 $\overrightarrow{OZ}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的最小值为 -3.

故答案为：-3



14. 某容器是一个圆锥和圆柱的组合体（如图），圆柱的底面直径为 4，高为 3，容器内放入一个直径为 4 的球后，该球与圆柱的侧面和底面、圆锥的侧面都相切，则该容器的体积为______________.



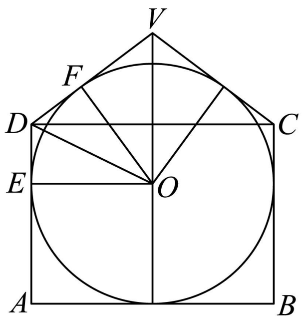
【答案】14π

【解析】

【分析】画出内切球的轴截面图，由图求出圆锥的高，然后利用圆锥与圆柱的体积公式计算即可.

【详解】由于圆柱的底面直径为 4，故 $r=2$，高为 $h=3$，所以圆柱的体积为：$\pi r^2h=12\pi$，

轴截面如图：设球心为 O，



则 $\triangle OED$ 与 $\triangle OFD$ 全等，由 $\tan\angle DOE=\dfrac{1}{2}$，得 $\cos\angle DOE=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\angle EOF$ 与 $\angle OVF$ 同为 $\angle EDF$ 的补角，故 $\angle EOF=\angle OVF$，

$\cos\angle EOF=\cos 2\angle DOE=2\cos^2\angle DOE-1=\dfrac{3}{5}$，

故 $\sin\angle EOF=\dfrac{4}{5}=\sin\angle OVF$，故 $VO=\dfrac{OF}{\sin\angle EOF}=\dfrac{5}{2}$，

故圆锥的高为$\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$，所以圆锥的体积为$\frac{1}{3}\pi r^2\times\frac{3}{2}=2\pi$，

故所求体积为$12\pi+2\pi=14\pi$.

故答案为：14π

四、解答题：共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知z为虚数，且$z^3=1$.

（1）求z的值；

（2）求$z^{2024}+z^{1012}$的值.

【答案】（1）$z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

（2）-1

【解析】

【分析】（1）由$z^3=1$，得$(z-1)(z^2+z+1)=0$，解方程即可求得z；

（2）由于$z^{2024}+z^{1012}=(z^3)^{674}\cdot z^2+(z^3)^{337}\cdot z=z^2+z$，结合$z^2+z+1=0$，即可求解.

【小问 1 详解】

因为$z^3=1$，所以$z^3-1=0$，

即$(z-1)(z^2+z+1)=0$，由于z为虚数，故$z-1\neq 0$，

所以$z^2+z+1=0$，故$\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$，

所以$z+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，所以$z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

【小问 2 详解】

$z^{2024}+z^{1012}=(z^3)^{674}\cdot z^2+(z^3)^{337}\cdot z=z^2+z$，

由于$z^2+z+1=0$，所以$z^2+z=-1$，

故$z^{2024}+z^{1012}=-1$.

16. 在平面直角坐标系中，$A(3,0),C(1,4),B(x,1)$，四边形$ABCD$是矩形且$\left|\overrightarrow{AB}\right|\neq\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

（1）求点B,D的坐标；

（2）M 与点 A,B,C,D 在同一平面直角坐标系中，当点 M 到 A,B,C,D 的距离的平方和最小时，求点 M 的坐标.

【答案】（1）点 $B(4,1)$，点 $D(0,3)$；

（2）$(2,2)$.

【解析】

【分析】（1）根据给定条件，利用向量垂直的坐标表示求出 x 并验证，再利用向量的坐标表示求解即得.

（2）设出点 M 的坐标，利用两点间距离公式建立关系式，配方求出最小值即得.

【小问 1 详解】

依题意，$\overrightarrow{AB}=(x-3,1),\overrightarrow{CB}=(x-1,-3)$，由矩形 $ABCD$，得

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=(x-3)(x-1)-3=0$，

解得 $x=0$ 或 $x=4$，当 $x=0$ 时，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CB}|$，不符合题意，而 $x=4$ 时，$|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{CB}|$，

因此 $x=4$，$B(4,1)$，显然 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(-3,3)$，于是得 $D(0,3)$，

所以点 $B(4,1)$，点 $D(0,3)$.

【小问 2 详解】

设 $M(t,s)$，依题意，$|\overrightarrow{AM}|^2+|\overrightarrow{BM}|^2+|\overrightarrow{CM}|^2+|\overrightarrow{DM}|^2$

$=(t-3)^2+s^2+(t-4)^2+(s-1)^2+(t-1)^2+(s-4)^2+t^2+(s-3)^2$

$=4t^2+4s^2-16t-16s+52=4(t-2)^2+4(s-2)^2+20\geq 20$，当且仅当 $t=2,s=2$ 时取等号，

所以点 M 的坐标为 $(2,2)$.

17. 已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为单位向量.

（1）若 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，求 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角；

（2）若 $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=-\vec{b}\cdot\vec{c}$，求 $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ 的值.

【答案】（1）$\dfrac{2\pi}{3}$

（2）1

【解析】

【分析】（1）由$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$得$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$，两边同时平方得到$\vec{a}\cdot\vec{b}$，从而求解$\vec{a},\vec{b}$的夹角即可；

（2）由$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=-\vec{b}\cdot\vec{c}$得$\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，求$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$，先平方再开方即可求解.

【小问1详解】

由于$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，所以$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$，

两边平方得$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{c}^2$，又$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为单位向量，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$，设$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\theta$，则$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，

所以$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，故$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$.

【小问2详解】

因为$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=-\vec{b}\cdot\vec{c}$，所以$\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，

由$\vec{a}^2=1$，故$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-1$，

所以$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}=3-2=1$

故$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=1$.

18. 已知某圆锥的母线长与底面直径相等，表面积为6π.

（1）求此圆锥的体积；

（2）若此圆锥内有一圆柱，该圆柱的下底面在圆锥的底面上，求该圆柱侧面积的最大值.

【答案】（1）$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$；

（2）$\sqrt{3}\pi$

【解析】

【分析】（1）根据给定条件，利用圆锥的表面积公式求出圆锥的底面圆半径及高，再利用圆锥的体积公式计算即得.

（2）利用圆锥与其内接圆柱的结构特征，用圆柱的底面圆半径表示出高，再求出侧面积的函数关系，借助基本不等式求解即得.

【小问 1 详解】

设圆锥底面圆半径为r，依题意，圆锥的母线长$l=2r$，

显然$\pi r^2+\pi rl=6\pi$，解得$r=\sqrt{2}$，圆锥的高$h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}r=\sqrt{6}$，

所以圆锥的体积$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

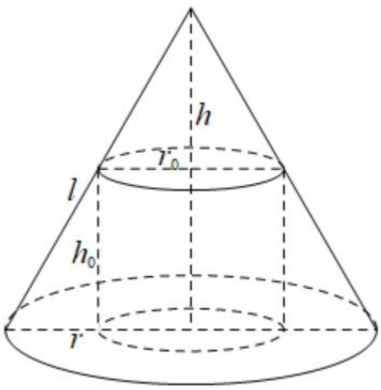
【小问 2 详解】

设圆锥的内接圆柱的底面圆半径为r_0，高为h_0，则有$\frac{r_0}{r}=\frac{h-h_0}{h}$，即$\frac{r_0}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-h_0}{\sqrt{6}}$，

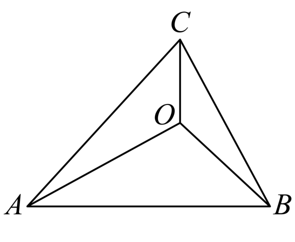
解得$h_0=\sqrt{6}-\sqrt{3}r_0$，

因此圆柱的侧面积$S=2\pi r_0h_0=2\sqrt{3}\pi r_0(\sqrt{2}-r_0)\le 2\sqrt{3}\pi(\frac{r_0+\sqrt{2}-r_0}{2})^2=\sqrt{3}\pi$，

当且仅当$r_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号，所以该圆柱侧面积的最大值为$\sqrt{3}\pi$.



19. 已知点O满足$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=\vec{0}\left(t\in\mathbf{R}\right)$,$\triangle AOB$ 的面积为$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{2}$.



（1）求t的值；

（2）若O为$\triangle ABC$的垂心，求$\cos\angle ACB$的值.

【答案】（1）5　　（2）$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

【解析】

【分析】（1）根据题意可知O为CD的中点，$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OC}$，结合已知条件可得$\overrightarrow{OD}=\dfrac{2}{t}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{t}\overrightarrow{OB}$，利用$A,D,B$三点共线得$\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{t}=1$，求得$t$；

（2）由（1）可得$\overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{CB}$，由$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AB}$，得$2\overrightarrow{CA}^2-3\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，由$\overrightarrow{AO}\perp\overrightarrow{CB}$，得$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{CB}^2$，进而求得$\left|\overrightarrow{CA}\right|=\dfrac{\sqrt{21}}{4}\left|\overrightarrow{CB}\right|$，利用向量夹角公式得解.

【小问1详解】

如图，延长CD交AB于点D，由$\triangle AOB$的面积为$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{2}$，可知O为CD的中点，

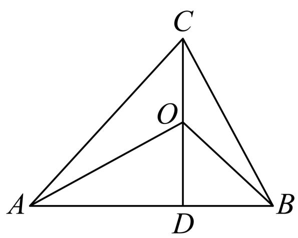
则$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OC}$，

因为A,D,B三点共线，则存在实数m使得$\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}$，即$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=m\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$，即

得$\overrightarrow{OD}=(1-m)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}$，

$\because 2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则$-\overrightarrow{OC}=\dfrac{2}{t}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{t}\overrightarrow{OB}$，即$\overrightarrow{OD}=\dfrac{2}{t}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{t}\overrightarrow{OB}$，

$\therefore\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{t}=1$，解得$t=5$.



【小问2详解】

由（1）知，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$，

则$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{3}{5}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{CB}$，

由$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AB}$，得$\left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{CB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=0$，化简得$2\overrightarrow{CA}^2-3\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$①，

又$\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{3}{10}\overrightarrow{CB}-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{CA}$，

由$\overrightarrow{AO}\perp\overrightarrow{CB}$，得$\left(\dfrac{3}{10}\overrightarrow{CB}-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{CA}\right)\cdot\overrightarrow{CB}=0$，化简得$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{CB}^2$②，

由①②两式可得，$2\overrightarrow{CA}^2-\frac{21}{8}\overrightarrow{CB}^2=0$，解得$\left|\overrightarrow{CA}\right|=\frac{\sqrt{21}}{4}\left|\overrightarrow{CB}\right|$，

故$\cos\angle ACB=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\frac{\frac{3}{8}\overrightarrow{CB}^2}{\frac{\sqrt{21}}{4}\left|\overrightarrow{CB}\right|^2}=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

【点睛】关键点睛：第一问，关键是利用A,D,B三点共线的性质结合$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OC}$，得解；第二问，关键是结合（1）的结论，利用$O$是垂心，得到$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AO}\perp\overrightarrow{CB}$，向量转化为$\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$基底表示运算求得$\left|\overrightarrow{CA}\right|=\frac{\sqrt{21}}{4}\left|\overrightarrow{CB}\right|$.