

1. B 抛物线 $C: y^2 = -2px (p > 0)$ 的准线方程为 $x = \frac{p}{2} = \frac{5}{2}$, 解得 $p = 5$. 故选 B.

2. C 由 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{12} = 1$, 得 $a^2 = 25, b^2 = 12$, 所以 $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 12 = 13, c = \sqrt{13}$, 所以椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的焦距为 $2c = 2\sqrt{13}$. 故选 C.

3. D 因为 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 所以 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, 即 $(-4, 2, n) = (2\lambda, m\lambda, 3\lambda)$, $-4 = 2\lambda, 2 = m\lambda, n = 3\lambda$, 解得 $\lambda = -2, m = -1, n = -6$, 所以 $m + n = -7$. 故选 D.

4. D 由题知 $3(m-1) - 2m(1-2m) = 0$, 整理得 $4m^2 + m - 3 = 0$, 解得 $m = -1$ 或 $m = \frac{3}{4}$, 经检验, 当 $m = -1$ 或 $m = \frac{3}{4}$ 时, 两直线平行, 所以 $m = -1$ 或 $\frac{3}{4}$. 故选 D.

5. B 方法一: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $a_1 + a_2 = 25, a_3 + a_4 = 50$, 得 $a_1(1+q) = 25, a_1q^2(1+q) = 50$, 所以 $q^2 = 2, a_5 + a_6 = a_1q^4(1+q) = 50q^2 = 100$. 故选 B.

方法二: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_2 = a_1 + a_2 = 25, S_4 - S_2 = a_3 + a_4 = 50, S_6 - S_4 = a_5 + a_6$, 且 $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$ 成等比数列, 所以 $(a_3 + a_4)^2 = (a_1 + a_2)(a_5 + a_6)$, 解得 $a_5 + a_6 = 100$. 故选 B.

6. C 记第 n 组中无人机的架数为 a_n , 由图形可得 $a_1 = 1, a_n - a_{n-1} = 3 (n \geq 2)$, 所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 3 的等差数列, 所以 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$, 令 $\frac{3n^2 - n}{2} = 210$, 得 $3n^2 - n - 420 = 0$, 解得 $n = -\frac{35}{3}$ (舍) 或 $n = 12$, 所以 210 架无人机可以同时排出的图形组数是 12. 故选 C.

7. A 由 $(n+2)a_{n+1} = na_n$, 得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}$, 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{4}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{5}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}$, 以上各式相乘, 得 $\frac{a_n}{a_1} = \frac{2}{n(n+1)}$, 又 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = \frac{2}{n(n+1)} (n \geq 2)$, 因为 $a_1 = 1$ 满足上式, 所以 $a_n = \frac{2}{n(n+1)} (n \in \mathbf{N}^*)$, 因为 $a_n = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, 所以 $S_{2025} = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026}\right) = \frac{2025}{2026}$. 故选 A.

8. B 由题知, 圆 $C: (x-3)^2 + y^2 = 4$ 的圆心为 $C(3, 0)$, 半径为 2, 取 AB 的中点 M , 连接 CM , 则 $CM \perp AB$,

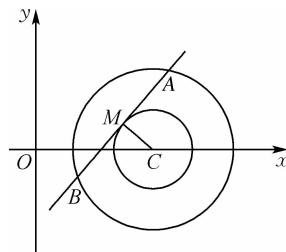
因为 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 所以 $|CM| = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$, 所以点 M 的轨迹是以点 C 为

圆心, 1 为半径的圆, 其方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 1$. 因为 $d_1 = \frac{|x_1 + 2y_1 - 1|}{\sqrt{5}}, d_2 =$

$\frac{|x_2 + 2y_2 - 1|}{\sqrt{5}}$ 可分别看作点 A, B 到直线 $l: x + 2y - 1 = 0$ 的距离, 所以当点 A, B

在直线 l 同侧时, $d_1 + d_2$ 是点 M 到直线 $l: x + 2y - 1 = 0$ 的距离 d_3 的 2 倍, 又点 $C(3, 0)$ 到直线 l 的距离

$d = \frac{|3 + 0 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以 d_3 的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5} + 1$, 所以 $|x_1 + 2y_1 - 1| + |x_2 + 2y_2 - 1|$ 的最大值为 $\sqrt{5} \times$



$2d_3=4+2\sqrt{5}$; 当点 A, B 在直线 l 异侧时, $d_1+d_2 \leq |AB|=2\sqrt{3}$, 所以 $|x_1+2y_1-1|+|x_2+2y_2-1|$ 的最大值为 $2\sqrt{15}$. 因为 $4+2\sqrt{5} > 2\sqrt{15}$, 所以 $|x_1+2y_1-1|+|x_2+2y_2-1|$ 的最大值为 $4+2\sqrt{5}$. 故选 B.

9. BD 由题意, 得 $a_2 = \frac{a_1-1}{a_1} = \frac{1}{2}$, 所以 $a_1=2, a_3 = \frac{a_2-1}{a_2} = -1, a_4 = \frac{a_3-1}{a_3} = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列, $a_{2025} = a_{675 \times 3} = -1, a_{2026} = a_{675 \times 3 + 1} = 2$. 故选 BD.

10. ABD 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{D_1B_1} = \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, 故 A 正确; 因为点 E 是 CC_1 上靠近 C_1 的三等分点, 所以 $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = \frac{2}{3}\mathbf{c}$, 又 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, 所以 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{c}$, 故 B 正确; 因为 $|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}| = 2, |\mathbf{b}| = |\overrightarrow{AD}| = 2, |\mathbf{c}| = |\overrightarrow{AA_1}| = 3, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \angle BAD = 2 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} = 2, \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos \angle BAA_1 = 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} = 3, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos \angle DAA_1 = 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} = 3$, 所以 $|\overrightarrow{AE}|^2 = \left(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{c}\right)^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \frac{4}{9}\mathbf{c}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{4}{3}\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \frac{4}{3}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 24$, 所以 $AE = 2\sqrt{6}$, 故 C 错误; $\overrightarrow{D_1B_1} \cdot \overrightarrow{AE} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \left(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{c}\right) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 + \frac{2}{3}\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \frac{2}{3}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 4 - 4 + \frac{2}{3} \times 3 - \frac{2}{3} \times 3 = 0$, 所以 $D_1B_1 \perp AE$, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. ACD 对于 A, 由题意知 C 的离心率为 $e = \frac{c}{a} = 2, 2a = 4$, 所以 $a = 2, c = 4, b = \sqrt{c^2 - a^2} = 2\sqrt{3}$, 所以 C 的

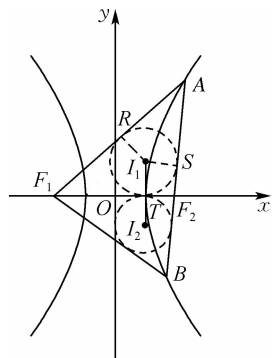
方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$, 故 A 正确; 对于 B, $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$, 设点 $P(x_0, y_0)$, 则

$\frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{12} = 1$, 即 $y_0^2 = 3x_0^2 - 12$, 所以 $k_1 k_2 = \frac{y_0}{x_0 + 4} \cdot \frac{y_0}{x_0 - 4} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - 16} = \frac{3x_0^2 - 12}{x_0^2 - 16}$ 不是

定值, 故 B 错误; 对于 C, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $Q\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, 因为

A, B 在 C 上, 所以 $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{12} = 1, \frac{x_2^2}{4} - \frac{y_2^2}{12} = 1$, 两式相减, 得 $\frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{4} = \frac{y_1^2}{12} - \frac{y_2^2}{12}$, 即 y_1^2

$-y_2^2 = 3(x_1^2 - x_2^2)$, 所以 $k_3 k_4 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = 3$, 故 C 正确; 对于 D, 如图, 设 $\triangle AF_1 F_2$ 和



$\triangle BF_1 F_2$ 的内心分别为 I_1, I_2 , 设 $\triangle AF_1 F_2$ 的内切圆的切点为 R, S, T , 由双曲线的定义得 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$, 又 $|AR| = |AS|$, 所以 $|RF_1| - |SF_2| = 2a$, 又 $|RF_1| = |TF_1|, |SF_2| = |TF_2|$, 所以 $|TF_1| - |TF_2| = 2a$, 又因为 $|MF_1| - |MF_2| = (c+a) - (c-a) = 2a$, 所以切点 T 与点 M 重合, 内心 I_1 的横坐标为 2, 同理可得内心 I_2 的横坐标也为 2, 所以 I_1, M, I_2 三点共线, 故 D 正确. 故选 ACD.

12. 99 由题知, $S_{11} = \frac{11(a_1 + a_{11})}{2} = \frac{11(a_4 + a_8)}{2} = 99$.

13. $\frac{7}{2}$ 由题意知 C 的准线为 $l: y = -\frac{3}{2}$, 设点 M 到 l 的距离为 d_1 , 圆 E 的圆心为 $E(1, 4)$, 半径为 2, E 到 l 的距离 $d_2 = \frac{11}{2}$, 则 $|MF| + |MN| \geq |MF| + |ME| - 2 = d_1 + |ME| - 2 \geq d_2 - 2 = \frac{11}{2} - 2 = \frac{7}{2}$, 当且仅当

M, N 都在直线 $x=1$ 上且 N 在 E 下方时, 等号成立, 所以 $|MF| + |MN|$ 的最小值为 $\frac{7}{2}$.

14. 12 任取 $\{a_n\}$ 的一个“融洽数列” $\{b_n\}$, 因为 $b_2 = a_1 + 1 = b_1 + 1 > b_1$ 或 $b_2 = a_3 - 1 \geq a_2 > a_1 = b_1, b_9 = a_8 + 1 \leq a_9 < a_{10} = b_{10}$ 或 $b_9 = a_{10} - 1 < a_{10} = b_{10}$, 所以有 $b_1 < b_2$ 且 $b_9 < b_{10}$, 对于 $i \in \{2, 3, \dots, 8\}, b_i, b_{i+1}$ 的取值分以下 4 种情形: ① $b_i = a_{i-1} + 1, b_{i+1} = a_i + 1$; ② $b_i = a_{i+1} - 1, b_{i+1} = a_{i+2} - 1$; ③ $b_i = a_{i-1} + 1, b_{i+1} = a_{i+2} - 1$; ④ $b_i = a_{i+1} - 1, b_{i+1} = a_i + 1$. 由数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且每一项都是整数, 得前 3 种情形显然都能得到 $b_i < b_{i+1}$, 所以只需考虑第 4 种情形, 由 $\{b_n\}$ 是递增数列, 得 $b_i < b_{i+1}$, 所以 $a_{i+1} - 1 < a_i + 1$, 即 $a_{i+1} < a_i + 2$, 由 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且每一项都是整数, 得 $a_{i+1} = a_i + 1$, 从而 $a_2, \dots, a_9$ 是公差为 1 的等差数列, 所以

$$\begin{cases} a_2 + 7 \leq 19, \\ a_2 \geq 2, \\ a_2 \in \mathbf{Z}, \end{cases} \quad \text{所以 } a_2 \in \{2, 3, \dots, 12\}, \text{ 即 } a_2 \text{ 的最大值为 } 12.$$

15. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

由 $a_{15} + a_{19} = 4$, 得 $a_{15} + a_{19} = 2a_{17} = 4$, 即 $a_{17} = 2$, 1 分

又 $a_{17} + a_{18} = 0$, 所以 $a_{18} = -2, d = a_{18} - a_{17} = -4$, 2 分

又 $a_{17} = a_1 + 16d = 2$, 所以 $a_1 = 66$, 4 分

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 66 - 4(n-1) = 70 - 4n$ 6 分

(2) 由 (1), 得 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(66 + 70 - 4n)}{2} = -2n^2 + 68n = -2(n-17)^2 + 578$, 10 分

所以当 $n=17$ 时, S_n 取得最大值 578. 13 分

16. 解: (1) 圆 C 的圆心为 $C(1, 0)$, 半径 $r=1$ 1 分

因为点 P 在 l 与 y 轴上, 所以 P 的坐标为 $P(0, -4)$, 2 分

设过点 P 且与圆 C 相切的直线为 l_1 ,

若 l_1 的斜率不存在, 则 l_1 的方程为 $x=0$, 圆心 $C(1, 0)$ 到 l_1 的距离等于 r , l_1 与圆 C 相切; 3 分

若 l_1 的斜率存在, 设 l_1 的方程为 $y=kx-4$, 即 $kx-y-4=0$,

由 l_1 与圆 C 相切, 得 $\frac{|k-4|}{\sqrt{k^2+1}} = r=1$, 解得 $k=\frac{15}{8}$,

所以 l_1 的方程为 $15x-8y-32=0$ 6 分

综上所述, 过点 P 且与圆 C 相切的直线方程为 $x=0$ 或 $15x-8y-32=0$ 7 分

(2) 因为点 P 在 l 与 x 轴上, 所以 P 的坐标为 $P(4, 0)$, 8 分

又 $C(1, 0)$, 所以 PC 的中点为 $(\frac{5}{2}, 0)$, $|PC|=3$, 10 分

所以以 PC 为直径的圆为 $(x-\frac{5}{2})^2 + y^2 = (\frac{3}{2})^2$, 即 $x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$ 12 分

将圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$ 的方程相减, 得直线 MN 的方程为 $3x-4=0$ 15 分

17. (1) 解: 已知 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = n^2 + n$,

当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=2$, 1 分

当 $n\geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n)-[(n-1)^2+n-1]=2n$, 2 分

经检验, 当 $n=1$ 时, $a_n=2n$ 成立, 所以 $a_n=2n$ 3 分

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$,

又 $b_1b_3=2b_5=\frac{1}{16}$, 所以 $b_1^2q^2=2b_1q^4=\frac{1}{16}$, 4 分

解得 $\begin{cases} b_1=\frac{1}{2}, \\ q=\frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b_1=\frac{1}{2}, \\ q=-\frac{1}{2} \end{cases}$ (舍去), 5 分

所以 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 6 分

(2)证明: 由(1)可得 $c_n=a_nb_n=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 7 分

则 $T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^0+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 8 分

又 $\frac{1}{2}T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 9 分

两式相减得 $\frac{1}{2}T_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=2-$

$(n+2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 11 分

所以 $T_n=4-(n+2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 13 分

因为 $(n+2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}>0$,

所以 $T_n=4-(n+2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<4$ 15 分

18. (1)证明: 因为 $PA=PD$, E 为 AD 的中点, 所以 $PE\perp AD$,

又 $PE\perp CD$, $AD\cap CD=D$, $AD, CD\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$, 2 分

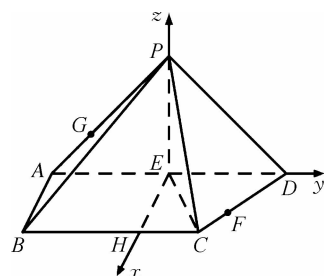
又 $PE\subset$ 平面 PAD , 所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$ 4 分

(2)解: 如图, 在平面 $ABCD$ 内, 作 $EH\perp AD$, 交 CB 于点 H , 则 EH, ED, EP 两两垂直,

以 E 为原点, EH, ED, EP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

由题意, 得 $P(0,0,6)$, $A(0,-6,0)$, $B(3\sqrt{3},-6,0)$, $C(3\sqrt{3},3,0)$,

所以 $\overrightarrow{AB}=(3\sqrt{3},0,0)$, $\overrightarrow{PB}=(3\sqrt{3},-6,-6)$, $\overrightarrow{CB}=(0,-9,0)$,



设 $\mathbf{m}=(x,y,z)$ 是平面 PAB 的法向量, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{m}=3\sqrt{3}x=0, \\ \overrightarrow{PB} \cdot \mathbf{m}=3\sqrt{3}x-6y-6z=0, \end{cases}$

令 $y=1$, 则 $x=0, z=-1$, 所以 $\mathbf{m}=(0,1,-1)$ 是平面 PAB 的一个法向量, 6 分

设 $\mathbf{n}=(a,b,c)$ 是平面 PBC 的法向量, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{CB} \cdot \mathbf{n}=-9b=0, \\ \overrightarrow{PB} \cdot \mathbf{n}=3\sqrt{3}a-6b-6c=0, \end{cases}$

令 $a=2$, 则 $b=0, c=\sqrt{3}$, 所以 $\mathbf{n}=(2,0,\sqrt{3})$ 是平面 PBC 的一个法向量, 8 分

设平面 PAB 与平面 PBC 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{42}}{14},$$

即平面 PAB 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{14}$ 10 分

(3)解: 由(2), 得 $D(0,6,0)$, 由 $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$, 得 $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}(-3\sqrt{3},3,0)$, 所以 $F(2\sqrt{3},4,0)$,

由 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}$, 得 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}(0,6,6)$, 所以 $G(0,-4,2)$.

$$\overrightarrow{EF}=(2\sqrt{3},4,0), \overrightarrow{EG}=(0,-4,2),$$

设 $\mathbf{u}=(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 EFG 的法向量, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \mathbf{u}=2\sqrt{3}x_0+4y_0=0, \\ \overrightarrow{EG} \cdot \mathbf{u}=-4y_0+2z_0=0, \end{cases}$

令 $x_0=2$, 则 $y_0=-\sqrt{3}, z_0=-2\sqrt{3}$, 所以 $\mathbf{u}=(2,-\sqrt{3},-2\sqrt{3})$ 是平面 EFG 的一个法向量, 12 分

由平面 EFG 与 PB 交于点 M , 设 $\overrightarrow{PM}=\lambda \overrightarrow{PB}=\lambda(3\sqrt{3},-6,-6)$, 则 $M(3\sqrt{3}\lambda,-6\lambda,6-6\lambda)$, $\overrightarrow{EM}=(3\sqrt{3}\lambda,-6\lambda,6-6\lambda)$,

因为 $\mathbf{u}$ 是平面 EFG 的法向量, 所以 $\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{EM}=(2,-\sqrt{3},-2\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{3}\lambda,-6\lambda,6-6\lambda)=0$,

即 $24\sqrt{3}\lambda-12\sqrt{3}=0$, 解得 $\lambda=\frac{1}{2}$, 所以 $M(\frac{3\sqrt{3}}{2},-3,3)$ 14 分

由平面 EFG 与 PC 交于点 N , 设 $\overrightarrow{PN}=\mu \overrightarrow{PC}=\mu(3\sqrt{3},3,-6)$, 则 $N(3\sqrt{3}\mu,3\mu,6-6\mu)$, $\overrightarrow{EN}=(3\sqrt{3}\mu,3\mu,6-6\mu)$,

因为 $\mathbf{u}$ 是平面 EFG 的法向量, 所以 $\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{EN}=(2,-\sqrt{3},-2\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{3}\mu,3\mu,6-6\mu)=0$,

即 $15\sqrt{3}\mu-12\sqrt{3}=0$, 解得 $\mu=\frac{4}{5}$, 所以 $N(\frac{12\sqrt{3}}{5},\frac{12}{5},\frac{6}{5})$ 16 分

所以 $MN=\sqrt{(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{12\sqrt{3}}{5})^2+(-3-\frac{12}{5})^2+(3-\frac{6}{5})^2}=\frac{9\sqrt{43}}{10}$ 17 分

19. (1)解: 因为椭圆 C 的长轴长为 4, 所以 $2a=4$, 解得 $a=2$ 1 分

设 $|F_1F_2|=2c$, 因为 $PF_1 \perp F_1F_2$, $\cos \angle PF_2F_1=\frac{4}{5}$, 所以 $|F_1F_2|=\frac{4}{5}|PF_2|$, $|PF_1|=\frac{3}{5}|PF_2|$,

又 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 4$, 所以 $\frac{3}{5}|PF_2| + |PF_2| = 4$, 解得 $|PF_2| = \frac{5}{2}$, 所以 $2c = |F_1F_2| = 2, c = 1$,

..... 3 分

所以 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$, 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2)(i) 解: 由题意知 l 的斜率不为 0, $F_1(-1, 0)$, 故可设 l 的方程为 $x = my - 1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ x = my - 1, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 并整理得 } (3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0, \text{ 此时 } \Delta = 144(m^2 + 1) > 0,$$

由韦达定理, 得 $y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4}$, 6 分

所以 $|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{\left(\frac{6m}{3m^2 + 4}\right)^2 + \frac{36}{3m^2 + 4}} = \frac{12\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4}$, 7 分

所以 $S_{\triangle ABF_2} = \frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{12\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4} = \frac{12}{3\sqrt{m^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}}$ 8 分

令 $t = \sqrt{m^2 + 1} \in [1, +\infty)$, 所以 $y = 3t + \frac{1}{t}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $y = 3t + \frac{1}{t} \geq 4$,

所以 $S_{\triangle ABF_2} = \frac{12}{3\sqrt{m^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}} \leq 3$, 当且仅当 $t = \sqrt{m^2 + 1} = 1$, 即 $m = 0$ 时, 等号成立.

所以 $\triangle ABF_2$ 面积的最大值为 3. 10 分

(ii) 证明: 由题可知 $Q(2, 0), F_2(1, 0)$,

直线 AQ 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$, 令 $x = 0$, 得 $y = \frac{2y_1}{2 - x_1}$, 即 $M\left(0, \frac{2y_1}{2 - x_1}\right)$, 11 分

直线 BQ 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$, 令 $x = 0$, 得 $y = \frac{2y_2}{2 - x_2}$, 即 $N\left(0, \frac{2y_2}{2 - x_2}\right)$, 12 分

$$\overrightarrow{F_1M} = \left(1, \frac{2y_1}{2 - x_1}\right), \overrightarrow{F_1N} = \left(1, \frac{2y_2}{2 - x_2}\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_1N} = \left(1, \frac{2y_1}{2 - x_1}\right) \cdot \left(1, \frac{2y_2}{2 - x_2}\right) = 1 + \frac{2y_1}{3 - my_1} \cdot \frac{2y_2}{3 - my_2} = 1 + \frac{4y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 - 3m(y_1 + y_2) + 9},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_1N} = 1 + \frac{-\frac{36}{3m^2 + 4}}{-\frac{9m^2}{3m^2 + 4} - \frac{18m^2}{3m^2 + 4} + 9} = 0, \text{ 即 } F_1M \perp F_1N. \text{ 14 分}$$

$$\overrightarrow{F_2M} = \left(-1, \frac{2y_1}{2 - x_1}\right), \overrightarrow{F_2N} = \left(-1, \frac{2y_2}{2 - x_2}\right),$$

同理可得 $\overrightarrow{F_2M} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0$, 即 $F_2M \perp F_2N$ 16 分

所以 F_1, F_2 在以 MN 为直径的圆上, 即 M, N, F_1, F_2 四点共圆. 17 分